-EXERCICE 13.5-

• ENONCE :

« Particule traversant un cylindre chargé »

• On considère un cylindre d'axe Oz, de très grande longueur devant son rayon R, chargé uniformément en volume : on notera $\rho \prec 0$ sa densité volumique de charge.

• Une particule (M), de masse m et de charge $q \succ 0$, pénètre dans le cylindre en un point P de cote z=0, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ quelconque (on pourra poser : $\vec{v}_0 = v_{0z}\vec{e}_z + v_u\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire appartenant au plan xOy, faisant un angle α avec l'axe Ox).

• Les effets de la pesanteur seront négligés.

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ régnant à l'intérieur du cylindre.
2) Déterminer la trajectoire de la particule.
3) Etudier le cas particulier $\alpha = 0$.
4) Donner 2 conditions pour que la particule décrive un cercle de centre O et de rayon R, ceci en projection dans le plan xOy.

Rq : pour résoudre la question 1) , il faut avoir pris connaissance du chapitre 26 consacré à « L' Electrostatique » ; dans le cas où ce chapitre n'a pas été abordé, on donne le champ :

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \qquad \text{(exprimé en coordonnées cylindriques)}$$

• CORRIGE :

«Particule traversant un cylindre chargé »

1) L'invariance cylindrique (par translation et rotation autour de l'axe Oz) implique un champ ne dépendant que de la variable radiale (coordonnées cylindriques).

• Les plans ($\vec{e}_z,\vec{e}_r$) et ($\vec{e}_r,\vec{e}_\theta$) sont des plans de symétrie pour la distribution de charges (ne pas oublier que le cylindre est considéré comme « illimité ») $\Rightarrow$ le champ électrique (« vrai vecteur ») appartient à l'intersection de ces 2 plans $\Rightarrow$ le champ est **radial** ; en résumé : $\vec{E}=E(r)\vec{e}_r$.

• On applique donc le théorème de Gauss à une surface fermée = enveloppe d'un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \le R$ et de hauteur h quelconque : $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

• Sur les surfaces de base du cylindre, l'élément de surface $d\vec{S}=\pm dS\vec{e}_z \Rightarrow d\vec{S}\cdot\vec{E}=0$; sur la surface latérale du cylindre, $d\vec{S}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et de même sens $\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{S}=E(r)\times dS$.

Par ailleurs, $E(r)$ est constant sur la surface d'intégration $\Rightarrow$ on peut sortir ce terme de l'intégrale, qui se ramène à : $\iint_{surf.lat} dS = 2\pi rh$. On obtient alors :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=2\pi rhE(r)=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{E}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r}$$

(le champ électrique est **radial**)

2) On applique le PFD à la particule, dans le référentiel lié au cylindre supposé galiléen ; on a :

$$m\vec{a}=q\vec{E}=\frac{q\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \qquad (1)$$

• Projetée sur l'axe Oz, cette relation fournit :

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{dz(t)}{dt}=cste=v_{0z}}$$

Rq : selon Oz, le mouvement est une translation uniforme.

• Dans le plan xOy, travaillons en coordonnées polaires avec $\vec{r}=r\vec{e}_r$; la relation (1) donne :

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\left(\dfrac{-q\rho}{2m\varepsilon_0}\right)\vec{r}=\vec{0} \Rightarrow$ c'est l'équation d'un oscillateur spatial de pulsation $\boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{-q\rho}{2m\varepsilon_0}}}$ ($-q\rho \succ 0$)

$\Rightarrow \quad \vec{r}(t)=\vec{A}\cos\omega t+\vec{B}\sin\omega t$.

• Les conditions initiales fournissent $\vec{r}(0)=R\vec{e}_x=\vec{A}$ et $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(0)=\omega\vec{B}=v_u\vec{u} \Rightarrow$ finalement, on a :

$$\boxed{\vec{r}(t)=R\cos(\omega t)\vec{e}_x+\frac{v_u}{\omega}\sin(\omega t)\vec{u}} \qquad (2)$$

Rq : avec $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$ et en projetant $\vec{u}$ sur les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, il est possible d'obtenir (après élimination de la variable t) une équation en coordonnées cartésiennes de la forme :

$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow$ la trajectoire de la particule est un **arc d'ellipse** dans le plan xOy.

3) Dans ce cas, $\vec{u} = -\vec{e}_x$, la trajectoire est un **segment de droite** (selon l'axe Ox), comme le suggère la relation (2) : la particule ressort en un point (Q) diamétralement opposé au point (P), tout au moins dans le plan xOy (il ne faut pas oublier l'aspect du mouvement selon l'axe Oz).

Le problème étant alors unidimensionnel (dépendant de la seule variable x), il est préférable d'appliquer la conservation de l'énergie mécanique à la particule :

$$\frac{1}{2}mv^2(x) + qV(x) = cste = \frac{1}{2}mv_u^2 + qV(R) \quad (3) \quad \text{(dans le plan xOy)}$$

• On sait que : $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{e}_r \Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + cste}$ $\Rightarrow$ en remplaçant dans l'expression (3), il vient : $\boxed{v^2(x) = v_u^2 + \frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}(x^2 - R^2)}$ (avec $q\rho \prec 0$)

$\Rightarrow$ la vitesse augmente de (P) à (O), puis diminue de (O) à (Q), ce qui est logique avec une force de type rappel.

Rq1 : au point (Q), c'est-à-dire en $x = -R$, la vitesse vaut v_u, ce qui pouvait se prévoir sans calculs, étant donné que la surface du cylindre est une équipotentielle (invariance par rotation autour de l'axe Oz).

Rq2 : la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ est vue en Electrostatique (chapitre 26).

4) Pour que la particule suive un cercle de rayon R (dans le plan xOy) et de centre O, il faut que : $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow$ la relation (2) montre que l'on doit avoir nécessairement :

- $\vec{u} = \vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi/2}$
- $R = \frac{v_u}{\omega} \Rightarrow \boxed{v_u = R\omega}$